《研究ノート》

Hamilton and Sultsky (1990) 定理８をめぐる論点

村　田　省　三

Abstract

In this paper, we reconsider the two person commitment game of Theorem 8 in Hamilton and Sultsky (1990), and point out that there must be simultaneous move Nash equilibria in this commitment game. This equilibria does not deleted by some dominant strategy. Simultaneous move Nash equilibrium is not dominated by the waiting strategy in the two person commitment game.

Therefore, the experimental evidence obtained in Fonseca et al (2006) is not contradiction. Simultaneous move Nash equilibrium will appear most frequently.

Keywords: commitment game, simultaneous move equilibria, undominated strategy

1　はじめに

本稿の定理１では，２人コミットメントゲームに関する Hamilton and Slutsky (1990) の定理８が誤りであることを示す。すなわち，支配されない純戦略均衡が２つのシュタッケルベルグ均衡のみであるということは誤りであり，同時手番ナッシュ均衡を排除することはできないことを示す。これが排除できないことの背景には，30年以上も前に，いわゆる囚人のパラドック

スとして指摘されていた論理矛盾に大きく関連するものがある。囚人のパラドックスにおける論理矛盾がどこにあるかをめぐる論争そのものが，数世紀にわたって行われ，論理解明されたのは最近であったことからみても，Hamilton and Slutsky (1990) の定理８の証明中に発生した誤謬も，理由のあることであったと見ることもできる。

同時手番ナッシュ均衡を，支配戦略均衡ではないとして排除する論理も，これと類似している。支配されない領域を求めるとき，支配される戦略によって実現される領域を可能な限り取り除いていくという推論をおこなうが，同時手番ナッシュ均衡から得られる利得は，どちらのプレイヤーにとっても実現可能な利得になっていることから，これ以下の利得しかもたらさない領域が排除される。ところが，それら領域を排除し終わった後にも，同時手番ナッシュ均衡が存在していなければならない。同時手番ナッシュ均衡そのものを排除すると，それによって排除された領域が，排除される理由がなくなるためである。

2　モデル

本稿における結論は，かなり一般的なコミットメントゲームにたいして成立するものであって，ある特定ゲームモデルのみに特有な結論ではない。しかし, 議論の明確性のため, ここでは, 本稿で言及されるコミットメントゲームを形式的に定義して，それに関連する用語の定義を与える。

プレイヤー A および B によっておこなわれる２人ゲームを考える。プレイヤー A および B は，それぞれ，以下で定義される期待利得 $E\pi_A$ および $E\pi_B$ を最大化するような戦略を選択するものとする。具体的には，プレイヤー A は $x(\in R)$ および $q_A(\in[0,\ 1]$ をコントロールして，その期待利得 $E\pi_A$ を最大化し，同様に，プレイヤー B は $y(\in R)$ および $q_B(\in[0,\ 1])$ をコントロールして，その期待利得 $E\pi_B$ を最大化するものとする。

$$E\pi_A(x, y, q_A, q_B) = q_A q_B \pi_A(x, y) + q_A(1-q_B)\pi_A(x, R_B(x)) + (1-q_A)q_B\pi_A(R_A(y), y) + (1-q_A)(1-q_B)\pi_A(R_A(y), R_B(x))$$

$$E\pi_B(x, y, q_A, q_B) = q_B q_A \pi_B(x, y) + q_B(1-q_A)\pi_B(R_A(y), y) + (1-q_B)q_A\pi_B(x, R_B(x)) + (1-q_B)(1-q_A)\pi_B(R_A(y), R_B(x))$$

ここで，R_i は，プレイヤー $i(i=A, B)$ の，ライバル $j(j=A, B,\ i\neq j)$ にたいする最適反応戦略である。この記法によると，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ均衡戦略 x^L は，$\frac{\partial\pi_A(x, R_B(x))}{\partial_x}=0$ の解として得られることになる。プレイヤー A 後手のシュタッケルベルグ均衡戦略 x^F は，$x^F=R_A(y^L)$ の解として得られることになる。同様にして, y^L および y^F がプレイヤー B について定義される。また，q_A および q_B は，各々，プレイヤー A および B が数量戦略値（価格戦略値のこともある）をコミットする確率である。したがって，$1-q_A$ および $1-q_B$ は，各々，プレイヤー A および B がそのような値をコミットしない確率である。この場合，プレイヤーは Wait 戦略をとるという。これに対して，同時手番ナッシュ均衡 $(x^s,\ y^s)$ は，方程式系 $\frac{\partial\pi_A(x, y)}{\partial x}=0$，$\frac{\partial\pi_B(x, y)}{\partial y}=0$ の解として与えられる。

なお, 本稿での議論に直接的な関連はないが, この複占コミットメントゲームの混合戦略均衡 (x, y, q_A, q_B) は，以下の４条件を満たすものとなる。

$$\frac{\partial E\pi_A}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial E\pi_B}{\partial y}=0$$

$$q_B\pi_A(x, y) + (1-q_B)\pi_A(x, R_B(x)) = q_B\pi_A(R_A(y), y) + (1-q_B)\pi_A(R_A(y), R_B(x))$$

$$q_A\pi_B(x, y) + (1-q_A)\pi_B(R_A(y), y) = q_A\pi_B(x, R_B(x)) + (1-q_A)\pi_B(R_A(y), R_B(x))$$

ここで，$q_A\in(0,\ 1)$，$q_B\in(0,\ 1)$。

3　定理８証明をめぐる考察

この節では，Hamilton and Slutsky (1990) 定理８の証明が誤りであることを示す。まず，同時手番ナッシュ均衡および，ふたつのシュタッケルベルグ均衡があるという定理７の概要を定理１として示す。続いて，同定理中にある同時手番ナッシュ均衡は他の戦略によって支配される均衡であるという定理８の概要を，定理２として示す。そして，定理３で，その誤りを指摘する。

定理１　コミットメントゲームには，多種の均衡が存在する。そのなかには，同時手番ナッシュ均衡がある。また，一方のプレイヤーが先手となるシュタッケルベルグ均衡がある。また，他方のプレイヤーが先手となるシュタッケルベルグ均衡がある。これ以外の純戦略均衡は存在しない。

証明．同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) においては，各プレイヤーは互いに最適反応戦略をとっていることになるから，その他の戦略によって各プレイヤーの利得が増大することはありえない。したがって，これはコミットメントゲームの均衡になる。

プレイヤー A が先手となるシュタッケルベルグ均衡では，プレイヤー B は Wait 戦略をとることになる。この Wait 戦略に対して，プレイヤー A は x^L を選択することが最適反応になる。また，この x^L にたいするプレイヤー B の最適反応戦略は，$x^F = R_A(y^L)$ であるから，その他の戦略によって各プレイヤーの利得が増大することはありえない。したがって，これはコミットメントゲームの均衡になる。プレイヤー B が先手となるシュタッケルベルグ均衡についても同様である。■

証明は与えられていないが，Hamilton and Slutsky (1990) では，ここで，２ラウンドの deletion をおこなうと，他の如何なる戦略によっても支配されない領域が，$\{(x, y): x \in (x^s, x^L),\ y \in (y^s, y^L)\}$ になることが示されている。基本的に２次の利潤関数である場合について，Pastine and Pastine (2004) が，

具体的に算出したところによっても同様の領域が残されるという結論が得られている。ただし，いわゆる２ラウンドの deletion によって残される，支配されない領域そのものについては，たとえ２次の利潤関数を仮定するとしても，その結論にはなお若干の矛盾を含んでいることを示すことができる。しかし，その論点については，本稿ではふれないこととする。いずれにしても，彼らの主張が正しいとすると，支配されないような領域として残るのは，同時手番ナッシュ均衡点をひとつの頂点とし，２つのシュタッケルベルグ均衡点を通過するような他の一辺を持つ矩形領域になる。

定理２　同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) がユニークであり，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ均衡 (x^L, y^F) およびプレイヤー A 後手のシュタッケルベルグ均衡 (x^F, y^L) がそれぞれユニークであるとする。このとき，支配されない領域内にある均衡は，２つのシュタッケルベルグ均衡のみである。すなわち，同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) は排除される。

証明． シュタッケルベルグ均衡については，これを支配する戦略がないことは明らかである。しかし，同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) については，プレイヤー A, B が，それぞれ x^s, y^s を第１期に選択する場合と，共に第２期に x^s, y^s を選択する場合がある。ところが，これら戦略は，第１期 Wait する戦略によって支配されるから，同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) は，支配されない均衡ではない。■

次の定理３では，上の定理２の証明が矛盾を含んでいることを示す。

定理３　$(R_A(y), R_{B(x))} = (x^S, y^S)$ を仮定してもしなくても，Hamilton and Slutsky (1990) 定理８のゲーム均衡としてのナッシュ均衡 (x^S, y^S) は排除されない。

証明． 他の如何なる戦略によっても支配されない領域が，最終的に $\{(x, y): x \in (x^s, x^L), y \in (y^s, y^L)\}$ になるのは，まず，第１回目の delition によって，同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) から得られる利得以下の領域が (x^S, y^S) によって支配されるからである。その後に行われる第２回目の deletion は，第

１回目の deletion が問題なく実行されていることを前提としておこなわれるものである。

ところで，前定理の証明では，同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) については，プレイヤー A, B が，それぞれ x^s, y^s を第１期に選択する場合と，共に第２期に x^s, y^s を選択する場合があるが，これら戦略は，第１期 Wait する戦略によって支配されるというが，仮に，結果的に (x^s, y^s) をもたらす戦略がことごとく排除されるものとすると，第１回目の deletion は，その成立根拠を失う。したがって，後続する第２回目の deletion も実行不能となり，かくして支配される領域そのものが消滅する。このため，$(R_A(y), R_B(x)) = (x^S, y^S)$ を仮定してもしなくても，結果的に (x^s, y^s) をもたらす戦略がことごとく排除されるのでない限り，Hamilton and Slutsky (1990) 定理８のゲーム均衡としてのナッシュ均衡 (x^S, y^S) は排除されない。■

この結果から，Fonseca et al (2006) が疑問視するところの，人々は何故，同時手番ナッシュ均衡を選択しようとするかという実験結果にたいして応答が可能になる。人々が同時手番ナッシュ均衡を選択しようとすることに何の矛盾もないという応答である。そもそも，同時手番ナッシュ均衡は排除されていないからである。たしかに，例えば繰り返しゲームのように，あまりに高度な推論を必要とするような理論的なゲーム均衡をめぐる知識について，人々の無知が（ときにはゲーム理論家のそれが）存在して，その結果，人々が理論的にはありえないゲーム均衡を誤って選択することがないわけではない。しかし，ここでの推論は，そのような難解なものではない。そうではなく，むしろ，Hamilton and Slutsky (1990) の考案した２ラウンドの deletion そのものが難解であって，そのためにゲーム理論家が誤って，ありうるゲーム均衡を除外してしまったのである。

なお，彼らの実験結果では，大半のケースで同時手番ナッシュ均衡が選択され，むしろ，いずれかのシュタッケルベルグ均衡が結果として出現することのほうが少なかったというが，これも，相当程度にまでプレーヤーの対称

性が確保されている状況下で，非対称な結果（いずれかが先手で他方が後手となるような均衡）の出現が稀であるという結果として評価されてよいと思われる。

4　あとがき

いわゆる囚人のパラドックスでは，１週間の間のどこかで刑が執行されるが，その当日の朝に言い当てれば形の執行が中止されるのであるが，最終日になれば，その日が執行の日と分かるため，刑の執行を正確に予想できて言い当てることが可能となる。したがって，最終日の執行はないと考えてよい。その推論から，最終日を執行の候補日から除いて考えるとき，後ろ向き帰納法による推論結果として，いずれの日にも執行はないという結論を得たという論理の誤謬が指摘されている。この推論をめぐる矛盾がどこにあるかについては，それが正しく認識されるまで，数世紀を要したという。最終日を（執行のありえない日として）排除する段階に何らの問題も発見されなかったが，排除した後に矛盾が発見された。排除後の（排除前の）最終日は何であるかが問題として指摘されたのである。排除後の（排除前の）最終日は，排除後の最終日の次の日という，まったく訳が分からない位置づけになるという決定的な問題である。かくして，囚人のパラドックスは，今では，囚人の勘違いという正しい位置づけがなされることとなったが，本稿で指摘したように，姿を変えて再び，ゲーム理論の中にこっそりと登場することとなった。

同時手番ナッシュ均衡を，支配戦略均衡ではないとして排除する論理も，これと類似している。支配されない領域を求めるとき，支配される領域を可能な限り取り除いていくという推論をおこなうのであるが，このとき，同時手番ナッシュ均衡から得られる利得は，どちらのプレイヤーにとっても実現可能な利得になっているという事実が重要である。この利得は，もちろん，

第１期にプレイヤー A が x^s を選択し，プレイヤー B が y^s を選択することによっても実現される。しかし，それ以外に，Wait 戦略によっても確保されることに誤りはない。ところが，支配される領域を特定するとき，同時手番ナッシュ均衡から得られる利得より小さい領域を排除していくのであるから，それら領域を排除し終わった後にも，同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) が存在していなければならない。同時手番ナッシュ均衡 (x^s, y^s) そのものを排除すると，それによって排除された領域が，排除される理由がなくなるためである。

その意味で，Hamilton and Slutsky (1990) 定理８において，同時手番ナッシュ均衡を，支配戦略均衡ではないとして排除する論理は，囚人のパラドックスにおいて，最終日を執行の候補日から除いて考える推論とは基本的に同様と見てよいのである。

参 考 文 献

[1] M.A. Fonseca, W. Müller, H.T. Normann., "Endogeneous timing in duopoly: experimental evidence", *International Journal of Game Theory*, 2006, 34, 443-456.

[2] Hamilton, J., and S, Slutsky., "Endogeneous Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria", *Games and Economic Behavior*, 1990, 2, 29-46.

[3] Pastine, I., and E, Pastine., "Cost of Delay and Endogenous Price Leadership", *International Journal of Industrial Organization*, 2004, 22, 135-145.